

اصل لانه کبوتری

گام به گام

آموزشی



عنایت‌اله راستی‌زاده*
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

هفته چند نفر از مهمانان متولد شده‌اند؟ یا در کدام روز تعداد بیشتری متولد شده‌اند؟ پاسخ هر دو مورد منفی است. ممکن است تمام مهمانان متولد روز جمعه باشند و ممکن است هیچ‌کدام از آن‌ها جمعه متولد نشده باشند! اما به هر حال روزی هست که در آن روز دست‌کم دو نفر از آن‌ها به دنیا آمده باشند. به وجود دو حداقل در لابه‌لای جملات نتیجه دقت کنید. (حداقل یک روز در هفته هست که حداقل دو نفر در آن روز به دنیا آمده باشند).

■ **مثال ۲.** در مثال قبل، فرض کنیم تعداد مهمانان ۱۵ نفر باشد. آن‌گاه چه؟

در این صورت، روزی از هفته را می‌توان یافت که در آن روز حداقل سه نفر از آن‌ها متولد شده باشند. در این مثال ۱۵ مهمان را به عنوان کبوتر و هفت روز هفته را به عنوان هفت لانه در نظر بگیرید. بگذارید کمی بیشتر مسئله را بشکافیم! فرض کنیم مهمان نخست روز شنبه و دومی روز یکشنبه و... هفتمی روز جمعه متولد شده باشند و دوباره روز از نو روزی از نو! مهمان شماره ۸ روز شنبه و مهمان شماره ۹ روز یکشنبه و... مهمان شماره ۱۴ روز جمعه... بالاخره پانزدهمین مهمان در یکی از روزهای هفته به دنیا آمده است. پس روزی پیدا شد که در آن روز سه نفر متولد شده‌اند. توجه کنید که این حالت، وضعیت حداقلی است! یعنی قناعت به حداقل‌های ممکن! والا ممکن بود همه ۱۵ مهمان به طور نمونه در روز جمعه به دنیا آمده باشند! و یا سایر حالت‌های دیگر. به هر صورت روزی از هفته پیدا می‌شود که در آن روز حداقل سه نفر متولد شده باشند. می‌توان نوشت: $15 = 7(2) + 1$

■ الگوبابی

قصه داریم به یک الگو دست پیدا کنیم. تعداد لانه را همان ۷ می‌گیریم (هفت روز هفته)، اما به مهمانان اضافه

کلیدواژه

اصل لانه کبوتر، اصل دیریکله، پلاک‌گذاری، باقی‌مانده مطلق

اشاره

اصل لانه کبوتری که با عنوان‌های دیگری همچون اصل لانه کبوتر، اصل حجره‌ها، اصل جعبه کفش و اصل دیریکله نیز بیان می‌شود، از جمله اصول کاربردی در حل بسیاری از مسائل ریاضی است. این اصل در عین سادگی و بدیهی بودن می‌تواند راه‌گشای حل برخی مسائل پیچیده ریاضی باشد. در این مقاله بر آنیم که با ذکر مسائل متعدد و از ساده به مشکل، چگونگی استفاده از این اصل را در حل مسائل گوناگون ببینیم.

■ گام نخست

ساده‌ترین شکل بیان اصل لانه کبوتری به این صورت است: اگر m کبوتر، n لانه کبوتر را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیشتر از تعداد لانه‌ها باشد، یعنی $m > n$ ، آن‌گاه حداقل یک لانه کبوتر وجود خواهد داشت که دست‌کم دو کبوتر در آن قرار گیرند.

■ **مثال ۱.** اگر ۹ نفر در یک مهمانی حضور داشته باشند، طبق اصل لانه کبوتری روزی از هفته می‌توان یافت که در آن روز حداقل دو نفر آن‌ها متولد شده باشند.

ابتدا بیایید با همین مثال ساده کمی بیشتر دست و پنجه نرم کنیم! آیا این مثال بیان می‌کند که در هر روز

می‌کنیم؛ ۱۶ مهمان، ۱۷ مهمان و بیشتر:

$$\text{لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر} \rightarrow 16 = 7(2) + 2$$

$$\text{لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر} \rightarrow 17 = 7(2) + 3$$

$$\text{لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر} \rightarrow 18 = 7(2) + 4$$

$$\text{لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر} \rightarrow 19 = 7(2) + 5$$

$$\text{لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر} \rightarrow 20 = 7(2) + 6$$

$$21 = ???$$

اما سطر آخر جدول قبل شایسته اندکی توجه است. اگر قرار بود عدد ۲۱ را بر هفت تقسیم کنیم، داشتیم: $21 = 7(3)$. اما این‌گونه نوشتن اندکی غلط‌انداز است یا لاف‌لاف در بحث‌ها باعث خلل در ساختن الگوی مناسب می‌شود! پس چگونه بنویسیم؟ می‌نویسیم: $21 = 7(2) + 7$. به عبارت دیگر علاقه‌مندیم خارج‌قسمت ۲ حفظ شود! این یعنی ۷ کبوتر باقی‌مانده راهی ۷ لانه شوند و باز هم می‌توان گفت لانه‌ای هست که در آن لانه حداقل ۳ کبوتر $(2+1)$ قرار دارند. به عبارت دیگر، اگر تعداد مهمانان تا ۲۱ مهمان جلو برود، تضمین نمی‌شود که روزی از هفته است که در آن روز دست‌کم ۴ نفر متولد شده باشند! اما مطمئناً روزی از هفته است که در آن روز دست‌کم ۳ نفر متولد شده باشند! این ایده خوبی است تا کمی جدی‌تر کار را دنبال کنیم. در موضوع لانه کبوتر قضیه زیر را داریم:

قضیه: اگر m کبوتر در n لانه قرار گیرند $(m > n)$ و:

$$m = nk + r, \quad r = 1, 2, 3, \dots, n$$

آن‌گاه دست‌کم در یک لانه حداقل $k+1$ کبوتر وجود دارد.

مثال ۳. اگر ۳۸ نفر در یک مهمانی حضور داشته باشند، طبق اصل لانه کبوتر (و قضیه فوق) ماهی از سال را می‌توان یافت که در آن ماه حداقل ۴ نفر آن‌ها متولد شده باشند؛ زیرا: $38 = 12(3) + 2$.

در این مثال، ۳۸ مهمان به‌عنوان ۳۸ کبوتر و ۱۲ ماه سال به‌عنوان ۱۲ لانه در نظر گرفته شده‌اند.

مثال ۴. برای آنکه مطمئن باشیم ماهی از سال را می‌توان یافت که در آن ماه حداقل ۴ نفر متولد شده باشند، حداقل چند نفر باید در مهمانی حضور داشته باشند؟

$$4 - 1 = 3 \Rightarrow 3 \times 12 = 36 \Rightarrow 36 + 1 = 37$$

پاسخ: حداقل ۳۷ نفر؛ زیرا: $37 = 12(3) + 1$.

مثال ۵. شهرداری اصفهان قصد دارد دانش‌آموزان بعضی

از مدارس را به‌طور رایگان به باغ پرندگان ببرد، اما یک شرط دارد؛ شرط آن است که حداقل در یکی از روزهای هفته دست‌کم ۵۸ دانش‌آموز آن مدرسه متولد شده باشند. این مدارس باید دست‌کم چند دانش‌آموز داشته باشند؟

پاسخ: دانش‌آموزان سوم ریاضی به کمک آمدند و راه چاره را به مدیران نشان دادند! خدا را شکر وگرنه لازم بود ساعت‌ها دفترداران و معاونین و مدیران پرونده بچه‌ها را زیرورو کنند تا بفهمند هرکسی چه روزی به دنیا آمده و آن روز، شنبه بوده، یکشنبه یا...

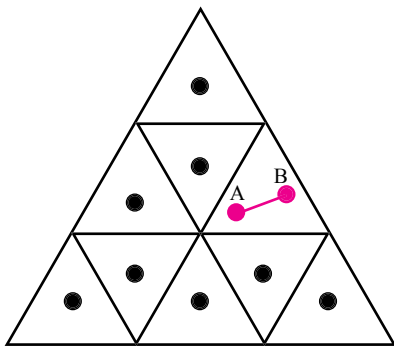
از ۵۸ یکی کم می‌کنیم و ۵۷ را در ۷ ضرب می‌کنیم و ۳۹۹ به دست می‌آید. پاسخ عدد ۴۰۰ خواهد بود. زیرا:

$$400 = 7(57) + 1$$

مدارس با حداقل ۴۰۰ دانش‌آموز بفرمایند باغ پرندگان به دعوت آقای شهردار!

مثال ۶. سال ۲۰۰۰ میلادی سال جهانی ریاضی نام داشت. از آن سال تاکنون جمعی از اهالی ریاضی شیراز به دنبال تأسیس خانه ریاضیات بوده‌اند! داخل یکی از آرم‌های پیشنهادی برای این مؤسسه، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱ سانتی‌متر طراحی شده است. که ده نقطه داخل آن است. نشان دهید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آن‌ها کمتر از $\frac{1}{3}$ است.

حل: پاسخ این مسئله بسیار ساده است! اضلاع مثلث را مطابق شکل زیر به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و نقاط تقسیم را به هم وصل می‌کنیم.



در این صورت ۹ مثلث کوچک پدید می‌آید که آن‌ها را ۹ لانه و ۱۰ نقطه را ۱۰ کبوتر فرض می‌کنیم که می‌خواهند داخل لانه‌ها جای گیرند. در ضمن، نقاط روی مرز را متعلق به هر دو مثلث می‌گیریم. بنابر اصل لانه کبوتری، حداقل دوتا از نقاط به یکی از مثلث‌های کوچک تعلق دارند. چون ضلع مثلث بزرگ برابر ۱ سانتی‌متر است، در نتیجه طول



اضلاع مثلث‌های کوچک‌تر $\frac{1}{3}$ خواهد بود. هنگامی این دو نقطه بیشترین فاصله را دارند که روی دو رأس مثلث باشند که آن هم امکان ندارد (زیرا نقاط داخل مثلث بزرگ واقع‌اند). لذا در هر صورت بیشترین فاصله هر دو نقطه همچون A و B (که در یک مثلث کوچک قرار گیرند) از یکدیگر کمتر از $\frac{1}{3}$ خواهد بود. ($AB < \frac{1}{3}$)

■ گام دوم: پلاک‌گذاری

در بعضی مسائل لانه کبوتری، با لانه‌هایی مواجه می‌شویم که: اولاً، با توجه به صورت سؤال پدید آورده‌ایم. ثانیاً، ظرفیت لانه‌ها محدود (معمولاً ۲ کبوتر) است. دوست دارم این نوع سؤالات لانه کبوتری را، لانه‌های پلاک‌گذاری شده (شماره‌گذاری شده) بنامم. در این مسائل، کبوترها به سراغ لانه هم‌شماره خود می‌روند! ببینید:

● مثال ۷. (تمرینی از کتاب درسی)

نشان دهید هر زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ که دارای ۶ عضو باشد، حداقل دو عضو دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

حل: لانه‌ها را به صورت زیر در

نظر می‌گیریم (گویا لانه‌ها شماره‌گذاری شده‌اند):

۱۹	۲۸	۳۷	۴۶	۵
----	----	----	----	---

در ۴ لانه از ۵ لانه، عددها را چنان انتخاب کرده‌ایم که می‌خواهیم! چه می‌خواهیم؟ می‌خواهیم مجموع آن‌ها ۱۰ باشد. هر زیرمجموعه ۶ عضوی از S حکم ۶ کبوتر خواهد داشت که راهی این لانه‌ها می‌شوند. در میان این ۶ عدد، یا ۵ هست یا نیست! اگر یکی از آن‌ها عدد ۵ باشد، عدد ۵ راهی لانه هم شماره‌اش می‌شود. پنج عدد دیگر می‌مانند و چهار لانه

۱۹	۲۸	۳۷	۴۶
----	----	----	----

طبق اصل لانه کبوتری، چون تعداد عددها (کبوترها) بیش از تعداد لانه‌هاست، دست کم در یک لانه دو کبوتر جا می‌گیرند (و فقط دو کبوتر). اشغال حداقل یکی از لانه‌ها توسط دو کبوتر، یعنی وجود حداقل دو عدد که جمعشان ۱۰ می‌شود و این مطلوب ماست!

و اگر در میان ۶ عدد انتخابی از مجموعه S، عدد ۵ نباشد، آن‌گاه ۶ عدد داریم و چهار لانه:

۱۹	۲۸	۳۷	۴۶
----	----	----	----

باز هم به دلیل زیادتر بودن کبوترها از لانه‌ها، حکم بدیهی است.

حتی در اینجا به دلیل ظرفیت محدود لانه‌ها دست کم دو زوج عدد پیدا می‌شود که مجموعی برابر ۱۰ دارند.

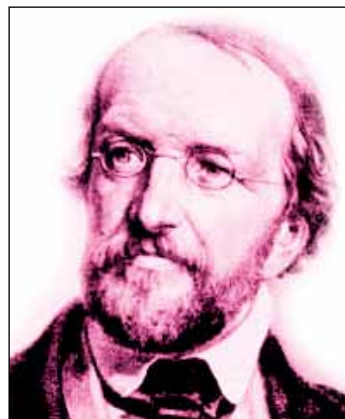
● مثال ۸. از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 14, 15\}$ حداقل چند

عدد انتخاب کنیم که مطمئن باشیم حداقل دو عضو از این اعضای انتخابی جمعشان ۱۱ می‌شود؟

پاسخ: اعدادی را که جمعشان ۱۱ می‌شود عبارت‌اند از:

۱۱۰	۲۹	۳۸	۴۷	۵۶
-----	----	----	----	----

این می‌شود ۵ لانه (با ظرفیت ۲ کبوتر). همچنین



لوژون دیریکله،
ریاضی دان آلمانی
قرن نوزدهم، مبدع
اصل لانه کبوتری

لانه‌هایی به صورت:

$$\boxed{11} \boxed{12} \boxed{13} \boxed{14} \boxed{15}$$

نیز خواهیم داشت (۵ لانه با ظرفیت یک کبوتر). پس جمعاً ۱۰ لانه داریم. لذا لازم است حداقل ۱۱ عدد از مجموعه S انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم دست کم یکی از لانه‌های دو کبوتری پر و پیمان می‌شود! یعنی دو عضو جمعشان ۱۱ می‌شود.

در کلاس درس: یکی پرسید: اگر ۵ عضو هم انتخاب کنیم، جمعشان ممکن است ۱۱ شود؟ مانند مجموعه $A = \{1, 9, 4, 6, 7\}$

(جمع ۴ و ۷ برابر یازده می‌شود).

پاسخ این دانش آموز در خود پرسش او نهفته است؟ زیرا کلمه ممکن است به کار برده! می‌توانستیم مجموعه $B = \{1, 2, 8, 7, 6, 11, 12, 13, 14, 15\}$ را انتخاب کنیم که ۱۰ عضو دارد و هیچ دوعضوی از اعضای B جمعشان ۱۱ نمی‌شود! آن‌گاه چه‌طور؟ پس ناچارید برای اطمینان، حداقل اعضای زیرمجموعه S را ۱۱ عضو بگیرید.

مثال ۹. از بین اعداد $1, 2, \dots, n$ حداقل چند عدد انتخاب کنیم به طوری که همواره حداقل دوتا از آن‌ها نسبت به هم اول باشند؟

پاسخ: لانه‌هایی (حجره‌هایی) به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\boxed{1, 2} \quad \boxed{3, 4} \quad \dots \quad \boxed{1, n-1} \quad \boxed{2, n} \quad \dots \quad \boxed{n-1, n}$$

حال n لانه داریم. اگر حداقل $n+1$ عدد انتخاب کنیم، حداقل دوتا از آن‌ها نسبت به هم اول اند. یعنی دست کم دو عدد متوالی پیدا می‌شود و دو عدد متوالی همواره نسبت به هم اول اند.

■ گام سوم: مثال‌های ویژه

در این گام سعی داریم مثال‌های ویژه‌ای را بررسی کنیم که بدون ممارست کافی، ممکن است اندکی پیچیده به نظر برسند.

مثال ۱۰. ۱۰ عدد طبیعی متمایز و کوچک‌تر از ۱۰۷ مفروض‌اند. نشان دهید که دو زیرمجموعه متمایز و غیرتهی از این ۱۰ عدد یافت می‌شود که مجموع اعضایشان یکسان است.

حل: ابتدا توجه کنیم که اگر مجموعه‌ای از ۱۰ عدد

طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۷ انتخاب کنیم، این مجموعه دارای $1023 - 1 = 1022$ زیرمجموعه غیرتهی است. (۱۰۲۳ کبوتر!) لذا این زیرمجموعه‌ها دارای یک عضو، دوعضو، ... تا ده‌عضو هستند. مجموع اعضای این زیرمجموعه‌ها در کمترین حالت برابر ۱ است. و بزرگ‌ترین ده‌عددی که می‌توانیم داشته باشیم، اعداد ۹۷، ۹۸، ...، ۱۰۶ هستند که:

$$97 + 98 + \dots + 106 = 1015$$

لذا شماره‌گذاری لانه‌ها را براساس حاصل جمع‌های ممکن تنظیم می‌کنیم؛ به صورت زیر:

$$\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \dots \boxed{1015}$$

حال مجموع اعداد هر زیرمجموعه را روی یک برگه می‌نویسیم (به عنوان یک کبوتر!) و داخل لانه هم شماره با آن مجموعه قرار می‌دهیم. بنابراین باید ۱۰۲۳ برگه را در ۱۰۱۵ مکان جای دهیم. تعداد برگه‌ها (کبوترها) از تعداد جاها (لانه‌ها) بیشتر است. پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل لانه‌ای یافت می‌شود که در آن لانه، حداقل دو کبوتر (یا بیشتر) جا می‌گیرند. این یعنی حداقل دو زیرمجموعه متمایز و غیرتهی یافت شده است که مجموع اعضایشان یکسان است.

مثال ۱۱. در یک مهمانی بعضی از مهمانان با هم دست می‌دهند. اگر کسی با خودش دست ندهد! و دو نفر هم پیش از یک‌بار با هم دست ندهند، ثابت کنید دو نفر یافت می‌شوند که تعداد دفعاتی که دست داده‌اند، یکسان است.

توضیح: این مسئله از مسائل معروف اصل لانه کبوتری است و در منابع گوناگون با اندکی تغییر دیده می‌شود.

حل: فرض کنیم n مهمان وجود داشته باشند. هر مهمان یا به هیچ‌کس دست نمی‌دهد یا به یک نفر دست می‌دهد یا به دو نفر و ... و یا اینکه در نهایت به همه دست می‌دهد. (یعنی به $n-1$ نفر دست می‌دهد). بنابراین، n لانه پلاک شده به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\boxed{0} \quad \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \dots \quad \boxed{n-1}$$

اگر هر فرد تعداد افرادی را که به آن‌ها دست داده است، روی کاغذ بنویسد و در لانه هم شماره با عدد نوشته شده قرار دهد، خواهیم دید که لانه‌ای هست که حداقل شامل دو تکه کاغذ است. ابتدا شاید به نظر برسد که در این سؤال تعداد لانه و تعداد کبوتر یکسان است. اما با کمی دقت معلوم می‌شود که از دو لانه ۰ و $n-1$ همواره یکی از لانه‌ها خالی می‌ماند! چرا؟ زیرا اگر فردی باشد که $n-1$ بار دست داده باشد، پس به همه دست داده است و در این صورت فردی یافت نمی‌شود که به هیچ‌کس دست نداده باشد و لانه ۰

خالی می ماند. برعکس اگر لانه با پلاک صفر پر شود، یعنی فردی هست که به هیچ کس دست نداده است و به این ترتیب لانه به شماره $n-1$ خالی خواهد ماند. بنابراین، از لانه های شماره صفر و $n-1$ حداقل یکی خالی است. پس n تکه کاغذ در $n-1$ (یا کمتر) لانه قرار گرفته اند. لذا (حداقل) یک لانه شامل دست کم دو تکه کاغذ است. این یعنی حداقل دو نفر با تعدادی مساوی از مهمانان دست داده اند. آخرین مسئله این قسمت از مقاله، سؤالی است که براساس مفهوم باقی مانده های مطلق حل می شود:

فرض کنید a یک عدد صحیح دلخواه باشد. اگر a را بر ۱۰۰ تقسیم کنیم، داریم:

$$99, 98, 97, \dots, 2, 1, 0, -1, -2, \dots, -99, -100$$

یعنی:

$$99 \leq a \leq 100 \Rightarrow a = 100 + j$$

را باقی مانده گویند. (باقی مانده نامنفی است).

باقی مانده مطلق چیست؟ در مثال قبل می توان نوشت:

$$50 \leq |m| \leq 100 + q$$

$|m|$ را باقی مانده مطلق می نامیم.

اکنون به تشریح بیشتر مفهوم بالا می پردازیم. وقتی می نویسیم:

$$99, 98, 97, \dots, 2, 1, 0, -1, -2, \dots, -99, -100$$

فرض کنیم باقی مانده (r) یکی از عددهای بیشتر از ۵۰ باشد؛ مثلاً $r = 51$. می توان نوشت:

$$(-49) + (100 + j) = 100 + 49 = 100 + j + 51 = 100 + j + 51$$

یعنی می توانیم باقی مانده را ۵۱ یا ۴۹ بگیریم. یا اگر $r = 99$ باشد، می توان نوشت:

$$(-1) + (100 + j) = 100 + j - 1 = 100 + j + 99 = 100 + j + 99$$

یعنی می توانیم باقی مانده را ۹۹ یا ۱ بنامیم. به بیان دیگر:

$$50, 49, \dots, 1, 0, -1, -2, \dots, -49, -50$$

$$-1, -2, \dots, -49, -50, \dots, -99, -100$$

و یا به صورت خلاصه: $m + 100 + q$ ، به قسمی که $k \in \mathbb{Z}$ و $50 \leq |m| \leq 100$ را باقی مانده مطلق می نامیم.

مثال ۱۲. نشان دهید که اگر ۵۲ عدد صحیح دلخواه داشته باشیم، دو تا از آن ها یافت می شود که مجموع یا تفاضل آن ها بر ۱۰۰ بخش پذیر باشد.

حل: اگر عدد صحیح a را بر ۱۰۰ تقسیم کنیم، عددهای صحیح k و t یافت می شوند که:

$$50 \leq |m| \leq 100 + q$$

$|m|$ باقی مانده مطلق است. مقادیری که $|m|$ می گیرد عبارتند از: ۰ و ۱ و ۲ و ... و ۵۰ که نقش ۵۱ لانه را دارند.

۵۲ عدد صحیح دلخواه نیز نقش ۵۲ کبوتر را دارند، چون: $51 > 50$. پس طبق اصل لانه کبوتری؛ لانه ای هست که در آن لانه دست کم دو کبوتر یافت می شود. یعنی دست کم دو تا از این ۵۲ عدد صحیح در تقسیم بر ۱۰۰ دارای یک باقی مانده مطلق خواهند شد.

فرض کنیم آن دو عدد m و n باشند؛ یعنی:

$$50 \leq |m| \leq 100 + q \quad m + 100 + q = k$$

$$50 \leq |m| \leq 100 + q \quad m + 100 + q = k$$

و اگر $|m| = |n|$ ، دو حالت پیش می آید:

حالت اول اینکه $m = n$ ، در این صورت:

$$(q - k) = 100 - k - k. \text{ پس: } l = 100 - k - k.$$

حالت دوم اینکه $m = -n$ ، در این صورت:

$$(q + k) = 100 - k + k. \text{ پس: } l = 100 - k + k.$$

حکم ثابت شد، یعنی لاقط دو عدد صحیح چون m و n یافت شد که مجموع یا تفاضل آن ها بر ۱۰۰ بخش پذیر است.

■ گام چهارم: مثال های دوره ای و تکمیلی

هدف ما در این گام، دوره و تکمیل می بحث اصل لانه کبوتری است. سعی شده است مسائلی از همه سطوح ساده؛ متوسط و مشکل و در چند قالب از جمله چندگزینه ای، درست - غلط و تشریحی طرح شود.

(الف) سؤالات درست - غلط

- معلوم کنید کدام درست و کدام غلط است؟
۱. از ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر در یک روز سال متولد شده اند.
 ۲. از ۸ نفر حداقل دو نفر در یک روز هفته به دنیا آمده اند.
 ۳. اگر ۳۹ نفر در یک مهمانی حاضر باشند، ماهی از سال را می توان یافت که در آن ماه حداقل ۵ نفر متولد شده اند.
 ۴. فرض کنید T یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد باشد. اگر پنج نقطه در T انتخاب شود، حداقل دو تا از این نقاط فاصله ای مساوی یا کمتر از $\frac{1}{2}$ دارند.
- پاسخ ها: ۱. درست؛ ۲. درست؛ ۳. نادرست؛ ۴. درست.

(ب) سؤالات چندگزینه ای

۱. ۶۵ کبوتر در حداکثر چند لانه قرار بگیرند تا حداقل در یک لانه بیش از دو کبوتر قرار داشته باشد (سراسری ۸۱)
- (۱) ۳۱ (۲) ۳۲ (۳) ۳۳ (۴) ۳۴

۲. در یک گروه ۵۵ نفری دست کم چند نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۳. تاس سالمی را دست کم چندبار پرتاب کنیم تا مطمئن شویم از یک عدد (نه مشخص) حداقل ۴ مرتبه ظاهر شده است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۳۱ (۳) ۲۵ (۴) ۱۹

پاسخ‌ها: ۱. گزینه ۲؛ ۲. گزینه ۳؛ ۳. گزینه ۴.

ج) سؤالات تشریحی (سطح متوسط)

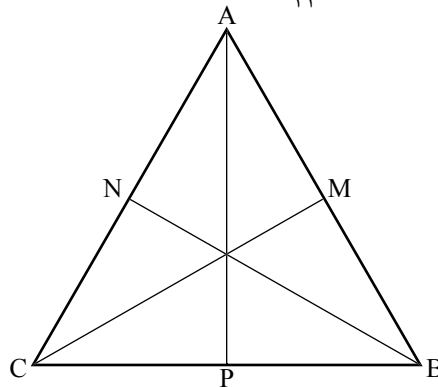
۱. مدرسه‌ای ۱۲ کلاس دارد. اگر بخواهیم مطمئن باشیم در یکی از کلاس‌ها، حداقل ۴ میز قرار دارد، تعداد میزها حداقل، باید چه عددی باشد؟

جواب: ۳۷

۲. کمترین تعداد افرادی را که حداقل دو نفر از آن‌ها در یک ماه از سال و یک روز هفته متولد شده باشند، به دست آورید. (این سؤال در قالب ۴ گزینه‌ای در کنکور سراسری ۸۲ مطرح شده بود.)

جواب: ۸۵

۳. درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، ۱۳ نقطه انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل ۳ نقطه وجود دارند که مساحت مثلث پدید آمده به وسیله آن سه نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{3}}{24}$ است.



حل: می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC

به ضلع ۱ برابر است با: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$. میان‌های مثلث را رسم می‌کنیم. شش مثلث هم‌نهشت پدید می‌آید که مساحت هر کدام $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث ABC، یعنی $\frac{\sqrt{3}}{24}$ است. حال اگر ۱۳ نقطه (۱۳ کیبوتر) را بین ۶ مثلث (۶ لانه) تقسیم کنیم،

حداقل در یکی از مثلث‌ها، دست کم ۳ نقطه قرار می‌گیرد و مساحت مثلث پدید آمده توسط آن ۳ نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{3}}{24}$ است.

د) سؤال تشریحی (سطح عالی)

این مقاله را با مسئله زیر و راه‌حل کامل آن به پایان می‌بریم. صورت این مسئله در اغلب کتاب‌های ریاضیات گسسته یافت می‌شود، اما راه‌حل بدیع و آموزشی آن به مؤلف مقاله تعلق دارد.

مسئله: ثابت کنید از هر مجموعه شامل n عدد طبیعی، می‌توان زیرمجموعه‌ای غیرتهی چنان یافت که مجموع اعضای آن بر n بخش‌پذیر باشد.

حل: فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مجموعه شامل n عدد طبیعی باشد. اگر یکی از اعضای مجموعه بر n بخش‌پذیر باشد که حکم ثابت است. پس فرض کنیم هیچ کدام از a_i ها بر n بخش‌پذیر نباشند. حال تعریف می‌کنیم:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

اگر یکی از s_i ها بر n بخش‌پذیر باشد که حکم ثابت است. پس فرض می‌کنیم s_i ها بر n بخش‌پذیر نباشند. در این صورت می‌توان نوشت:

$$s_1 \equiv 1, s_2 \equiv 2, \dots, s_{n-1} \equiv n-1, s_n \equiv 0 \pmod{n}$$

(توجه: r_i نمی‌تواند صفر باشد، چون فرض کرده‌ایم s_i ها بر n بخش‌پذیر نباشند.)

$n-1$ لانه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\{1\} \{2\} \{3\} \dots \{n-1\}$$

اگر s_1 تا s_n را به عنوان n کیبوتر در نظر بگیریم، چون $n > n-1$ ، پس طبق اصل لانه کیبوتری حداقل لانه‌ای یافت می‌شود که در آن لانه دست کم دو کیبوتر جای می‌گیرد. یعنی دست کم s_k و s_j یافت می‌شود که در تقسیم بر n هم باقی‌مانده باشند (فرض کنیم $j > k$). پس: $s_j - s_k \equiv 0 \pmod{n}$ و:

$$s_j - s_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_j$$

$$s_j - s_k \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_j \equiv 0 \pmod{n}$$

$$s_j - s_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_j \Rightarrow a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_j \equiv 0 \pmod{n}$$

پس زیرمجموعه‌ای از مجموعه A یافت شد که مجموع اعضای آن بر n بخش‌پذیر باشد.